

# Adiabatische Invarianz im Mittel

L. Janicke

Institut für Theoretische Physik, Lehrstuhl IV, Ruhr-Universität Bochum

(Z. Naturforsch. 30 a, 421–430 [1975]; eingegangen am 20. Dezember 1974)

## Adiabatic Invariance in the Average

We study the possibility to construct an adiabatic invariant for charged particles in electromagnetic fields, that vary strongly in space but only slowly in time (measured by a small parameter  $\varepsilon$ ). We specialize to those fields, where the motion of the particle is described by a Hamiltonian that corresponds to a one-dimensional oscillator with a potential exhibiting two minima. This type of potential can occur in the case of one-dimensional fields with neutral sheets. The action integral  $I = \oint p dq$  is no longer an adiabatic invariant for particles with an energy near the value of the inner maximum of the potential, nor is it a continuous function of the energy. The second difficulty can be removed by proper redefinition. Then by using the area conservation in the phase plane it can be shown that for any arbitrary particle ensemble in the phase plane of the one-dimensional oscillator the mean value of the action integral is adiabatically invariant to order  $\varepsilon \ln^4 \varepsilon$ . Under certain circumstances it can happen that a coherent ensemble splits up into two separated groups. It will be shown that this also can be understood essentially as an adiabatic process.

### 1. Einleitung

Beim Studium der Bewegung geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern ist die Kenntnis von adiabatischen Invarianten neben evtl. vorhandenen Bewegungskonstanten von großer Bedeutung<sup>1, 2</sup>. Lange bekannt<sup>3–5</sup> ist die adiabatische Invarianz des magnetischen Moments  $\mu$  der Stromschleife, die durch die Gyrationbewegung des Teilchens entsteht:

$$\mu = m v_{\perp}^2 / 2 B. \quad (1.1)$$

( $v_{\perp}$  ist die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu den magnetischen Feldlinien), unter der Voraussetzung, daß sich das Teilchen in einem nahezu homogenen, zeitlich schwach veränderlichen Magnetfeld bewegt, d. h. in einem Feld, das sich während einer Gyration vom Teilchen aus gesehen nur wenig ändert:

$$\left| \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} \right| \ll \omega_g = \frac{e B}{m c}. \quad (1.2)$$

In manchen Fällen kann man auch bei Verletzung der Bedingung (1.2) noch weiterhin am Konzept der adiabatischen Invarianz festhalten, z. B. kann man bei homogenen Magnetfeldern mit zeitlichem Nulldurchgang versuchen, die Variation von  $\mu$  abzuschätzen<sup>6, 7</sup>. Bei stark inhomogenen Feldern ist  $\mu$  als adiabatische Invariante nicht mehr brauchbar

Sonderdruckanforderungen an Dr. L. Janicke, Institut für Theoretische Physik, Lehrstuhl IV, Ruhr-Universität Bochum, D-4630 Bochum.

(Abbildung 1). Im Fall schwach zeitabhängiger eindimensionaler Felder, d. h. solcher Felder, bei denen sich die Bewegung des Teilchens durch geeignete Wahl der Koordinaten im wesentlichen auf das Pro-

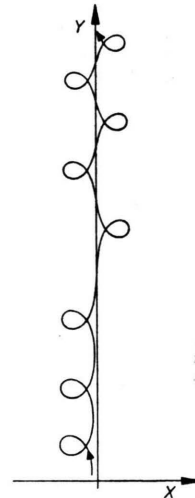


Abb. 1. Bahn eines Teilchens in einem Magnetfeld  $\mathfrak{B} = x(1 + \varepsilon t) \mathbf{e}_z$ . Da die Bahn auch nicht annähernd mehr kreisförmig ist, ist der Begriff des magnetischen Momentes  $\mu$  nicht mehr zur Beschreibung des Teilchens geeignet.

blem des eindimensionalen Oszillators mit der Hamilton-Funktion

$$H = H(p, q, t) = p^2/2 + \psi(q, t) \quad (1.3)$$

reduzieren läßt (z. B. bei ebenen Magnetfeldern oder der z-unabhängigen, rotationssymmetrischen  $\Theta$ -



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Pinch-Konfiguration), hat man jedoch aus der Theorie des eindimensionalen Oszillators<sup>5, 8-10</sup> als geeignete adiabatische Invariante das Wirkungsintegral  $J$

$$J(p, q, \tau) = \int dp' dq' \cdot H(p', q', \tau) \leq H(p, q, \tau). \quad (1.4)$$

Im homogenen Magnetfeld ist  $J$  proportional  $\mu$ . Voraussetzung für die adiabatische Invarianz von  $J$  ist u. a., daß in der  $pq$ -Ebene die Linien  $H = \text{const}$  zumindest in der Umgebung der Teilchentrajektorie die Topologie eines Systems konzentrischer Kreise besitzen. Dies ist immer erfüllt, wenn das Potential  $\psi$  in (1.3) die Form eines einfachen Topfes besitzt. Felder mit räumlicher Richtungsumkehr (es treten neutrale Schichten auf) führen jedoch im allgemeinen auf Potentialformen mit mehreren Minima, bei denen in der Umgebung der Energie des Zwischenmaximums die Topologie der Linien  $H = \text{const}$  stark verändert wird (s. Abb. 2), so daß die bisherigen

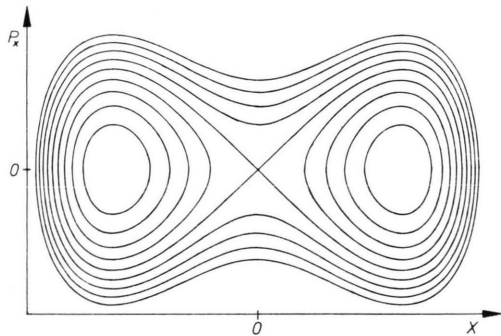


Abb. 2. Linien  $H(p_x, x) = \text{const}$  in der Phasenebene des eindimensionalen Oszillators mit der Hamilton-Funktion

$$H(p_x, x, t) = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} p_z^2 + \frac{1}{2m} \left[ p_y - \frac{e}{2c} f(t) x^2 \right]^2$$

Dies entspricht einem Teilchen mit der Masse  $m$ , der Ladung  $e$  und den konstanten kanonischen Impulsen  $p_z, p_y$  in einem Magnetfeld der Form  $\mathfrak{B} = x f(t) \mathbf{e}_z$  (Vektorpotential  $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} x^2 f(t) \mathbf{e}_y$ ). Die Linie durch den Sattelpunkt bei  $x=0, p_x=0$  teilt die Ebene in drei Bereiche, die jeweils die Topologie eines Systems konzentrischer Kreise besitzen.

Verfahren zum Nachweis der adiabatischen Invarianz von  $J$  in diesem Energiebereich versagen. Abgesehen davon, daß das Wirkungsintegral  $J$  keine stetige und keine eindeutige Funktion der Energie mehr ist, kann man sich anhand einfacher Beispiele leicht klarmachen, daß es immer Teilchen geben wird, deren Verhalten man als stark nicht-adiabatisch bezeichnen muß, gleichgültig wie man den Begriff der Adiabatischen Invarianz hier neu zu formulieren gedenkt, nämlich diejenigen, die auf dem Energiesattel mehr oder weniger lange im labilen Gleichgewicht verharren. Es bleibt jedoch zu über-

legen, ob innerhalb einer Teilchengruppe diese nicht-adiabatischen Teilchen nicht stark in der Minderzahl sind, und es wird sich tatsächlich herausstellen, daß bei einer Gruppenmittelung wieder eine Aussage über eine adiabatische Invarianz möglich ist. Da sich die Methode von Lenard<sup>8</sup> auch bei der Untersuchung der adiabatischen Invarianz von  $J$  im Falle unstetiger Magnetfelder<sup>9</sup> oder starker räumlicher Oszillation<sup>10</sup> als brauchbar erwiesen hat, soll hier zunächst nach diesem Verfahren das Verhalten des Wirkungsintegrals eines einzelnen Teilchens verfolgt werden – Lenards Umweg über die Liouville-Gleichung wird sich dabei als vermeidbar herausstellen – und erst nach der Ausschöpfung des Einteilchenbildes mit einer Gruppenmittelung begonnen werden. Der Effekt, daß sich eine Teilchengruppe bei einem bestimmten Verhalten des Potentials in zwei Teilchengruppen aufspaltet, wird dabei in einem besonderen Kapitel untersucht werden.

## 2. Definitionen und Voraussetzungen

Die Hamilton-Funktion  $H$  ist in der Form gegeben

$$H(p, q, \tau) = p^2/2 + \psi(q, \tau), \quad (2.1)$$

wobei durch die Substitution  $\tau = \varepsilon t$  mit einer kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$  die schwache Zeitabhängigkeit des Systems ausgedrückt wird. Das Potential  $\psi$  genügt im Zeitintervall  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$  den Bedingungen

- a) es ist zweimal partiell stetig differenzierbar,
- b) es besitzt zwei Minima und die dazwischen liegende Energieschwelle  $E_s(\tau)$  ist in einer genügend kleinen Umgebung des Maximums durch einen Parabelbogen approximierbar.

Die Lage der beiden Minima wird mit  $q_l(\tau)$  bzw.  $q_r(\tau)$  bezeichnet, die des Maximums mit  $q_s(\tau)$ . Die Linien  $H = \text{const}$  in der  $pq$ -Ebene bilden zu jedem Zeitpunkt  $\tau$  geschlossene Kurven (Abbildung 2). Sie umschließen eine Fläche  $F$ , die gegeben ist durch

$$F(E, \tau) = \int_{H \leq E} dp dq = \oint p(E, q, \tau) dq. \quad (2.2)$$

Für  $E < E_s(\tau)$  muß dabei noch angegeben werden, welcher der beiden Potentialtöpfe gemeint ist, d. h. ob die Linie  $H(p, q, \tau) = E$  mit  $q < q_s(\tau)$  (linker Potentialtopf) oder die mit  $q > q_s(\tau)$  (rechter Potentialtopf) betrachtet wird. Die Flächen der beiden Potentialtöpfe sind:

$$\begin{aligned} F_l(\tau) &= \oint p dq, & F_r(\tau) &= \oint p dq, \\ H &= E_s(\tau), & H &= E_s(\tau) \\ q &\leq q_s(\tau), & q &\geq q_s(\tau) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Das Wirkungsintegral  $J$  ist dann für Punkte aus der Phasenebene definiert als

$$J(p, q, \tau) = F[H(p, q, \tau), \tau], \quad (2.4)$$

d. h. es ist die Fläche unter derjenigen Linie  $H = \text{const}$ , auf der sich der Punkt  $(p, q)$  zur Zeit  $\tau$  befindet.

Die nicht-adiabatischen Effekte dieses Potentials rühren, wie schon vorher erwähnt, daher, daß Teilchen auf der Energieschwelle im labilen Gleichgewicht verharren können. Analytisch macht sich dies dadurch bemerkbar, daß die Schwingungsdauer  $\Theta$  im eingefrorenen Hamilton-System bei Annäherung der Teilchenenergie  $E$  and die Schwellenenergie  $E_s$  divergiert:

$$\Theta \sim -\ln \delta, \quad \delta = |E_s(\tau) - E|. \quad (2.5)$$

Für die Untersuchung, wie die Invarianz für Energien in der Nähe von  $E_s$  verloren geht, bzw. was sich von ihr noch retten läßt, wird zunächst noch eine weitere Voraussetzung an das Potential gemacht:

c) die Flächen der beiden Potentialtöpfe,  $F_1(\tau)$  und  $F_r(\tau)$ , nehmen streng monoton ab.

Ein streng adiabatisches Teilchen mit konstantem Wirkungsintegral  $J = J_1$ , das sich zur Zeit  $\tau_1$  in einem der Potentialtöpfe befindet, würde solange darinnen bleiben, bis die Fläche des Topfes auf den Wert  $J_1$  geschrumpft ist. Dann hat es die Linie  $H = E_s$  erreicht. Beim Überschreiten dieser Linie springt das Wirkungsintegral um den Betrag, den die Fläche des anderen Potentialtopfes in diesem Augenblick ausmacht, und bleibt dann im oberen Bereich weiterhin konstant auf dem neuen Wert, während sich die Teilchentrajektorie in der  $pq$ -Ebene immer weiter von der Linie  $H = E_s$  entfernt.

Da die Energieschwelle die Tendenz hat, die (wirklichen) Teilchen festzuhalten, ist zu vermuten, daß die nicht-adiabatischen Effekte immer eine Verkleinerung des Wirkungsintegrals gegenüber dem des streng adiabatischen Teilchens bewirken. Es soll daher zunächst für ein Teilchen, dessen Energie im Zeitintervall  $(\tau_1, \tau_2)$  in die Nähe der Schwelle  $E_s$  gelangt, gezeigt werden, daß die Zunahme seines Wirkungsintegrals, abgesehen von dem erwähnten Sprung, innerhalb der durch eine adiabatische Toleranz gegebenen Grenzen liegt. Die nächste Aufgabe besteht dann darin, eine Größe  $K$ , eine Modifizierung des Wirkungsintegrals  $J$ , zu finden, die eine stetige Funktion der Energie und für das oben beschriebene streng adiabatische Teilchen konstant ist.

Von  $K$  wird dann allein aufgrund der Flächenerhaltung in der Phasenebene gezeigt, daß es für eine Teilchengruppe im Mittel adiabatisch invariant ist, also auch die Abnahme des Mittelwertes beim Überschreiten der Schwelle  $E_s$  innerhalb einer adiabatischen Toleranz liegt.

### 3. Eine Ungleichung für das Wirkungsintegral \*

Es ist zweckmäßig, statt  $p$  und  $q$  neue Koordinaten  $J$  und  $s$  einzuführen, wobei  $J(p, q, \tau)$  das oben definierte Wirkungsintegral und  $s$  die Bogenlänge entlang der Linie  $H(p, q, \tau) = \text{const}$  ist. Um zu eindeutigen Definitionen zu gelangen, sei die Rechnung zunächst auf den linken Potentialtopf beschränkt, d. h.  $q \leq q_s(\tau)$  und  $J(p, q, \tau) \leq F_1(\tau)$ .  $s$  werde im Uhrzeigersinn von  $p = 0$ ,  $q \leq q_1(\tau)$  aus gemessen. Die Umrechnung der zeitlichen Änderung einer beliebigen Größe  $f(p, q, \tau)$  entlang der Teilchenbahn:

$$\frac{df}{dt} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} \quad (3.1)$$

auf die neuen Koordinaten liefert

$$\frac{df}{dt} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \tau} + |\nabla H| \frac{\partial f}{\partial s}, \quad (3.2)$$

wobei die partielle Ableitung nach  $\tau$  weiterhin bei festem  $p$  und  $q$  zu verstehen ist, und zwar das ganze Kapitel hindurch. Insbesondere gilt für  $J$  selbst

$$dJ/dt = \varepsilon \partial J / \partial \tau. \quad (3.3)$$

$W(t)$  sei das Wirkungsintegral speziell des Teilchens, das sich zur Zeit  $t_1$  an der Stelle  $J_1, s_1$  befindet. Dann gilt

$$W(t_1) = W_1 = J_1, \quad dW/dt = \varepsilon \partial J / \partial \tau. \quad (3.4)$$

Man kann dies als Differentialgleichung für  $W$  auffassen und formal eine Lösung angeben (vgl. Schindler<sup>9)</sup>):

$$W(t) = W_1 + \varepsilon \left\{ f_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial f_1}{\partial \tau} d\tau \right\}, \quad (3.5)$$

$$f_1 = \int_{s_1}^s \frac{1}{|\nabla H|} \frac{\partial J}{\partial \tau} ds, \quad (3.6)$$

\* Die ersten Teile der folgenden Rechnung lehnen sich an die Methode von Lenard an, wobei jedoch der dort beschrittene Umweg über die Liouville-Gleichung vermieden werden kann.

wobei das Integral über  $s$  längs derjenigen Linie  $H = \text{const}$  (bei festem  $\tau$ !) zu erstrecken ist, auf welcher sich das Teilchen zur Zeit  $\tau$  befindet, und das Integral über  $\tau$  längs der richtigen Teilchenbahn. Die Eindeutigkeit der Funktion  $f_1$  also

$$\oint \frac{1}{|\nabla H|} \frac{\partial J}{\partial \tau} ds = 0 \quad (3.7)$$

folgt unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung von  $J$  als der Fläche, längs deren Rand der Integrationsweg läuft. Gleichung (3.5) ist für die exakte Berechnung von  $W$  ohne Bedeutung, da sie die Kenntnis der gesamten Bahnkurve voraussetzt; wichtig ist sie aber für Abschätzungen, denn man kann leicht zeigen, daß im Falle eines einfachen, glatten Potentialtopfes der Klammerausdruck beschränkt ist, aus (3.5) folgt dann unmittelbar die adiabatische Invarianz des Wirkungsintegrals. Bei dem hier zu untersuchenden doppelten Potentialtopf divergiert jedoch der Klammerausdruck, wenn sich das betrachtete Teilchen der Schwellenenergie nähert (für  $p = 0$ ,  $q = q_s$  ist  $|\nabla H| = 0$ ). Eine ziemlich mühsame Rechnung führt zu den Abschätzungen:

$$|f_1| \leq A \ln^2 \delta(\tau), \quad |\partial f_1 / \partial \tau| \leq B \ln^2 \delta(\tau) / \delta(\tau) \quad (3.8)$$

mit geeigneten Konstanten  $A$  und  $B$  und  $\delta(\tau) = |H(\tau) - E_s(\tau)|$ ,  $H(\tau)$  ist die Energie des Teilchens

zur Zeit  $\tau$ . Eigentlich gilt dies nur für kleine  $\delta$ , für große  $\delta$  müßte  $|\ln \delta|$  durch  $|\ln \delta| + C$  ersetzt werden mit einer geeigneten positiven Konstanten  $C$ . Zur Vereinfachung der Schreibweise wird jedoch die obige Form beibehalten, da kaum Mißverständnisse entstehen können. Benutzt man für die Zeitabhängigkeit von  $W$  auch die  $\tau$ -Skala, dann erhält man aus (3.5) und (3.8) die Abschätzung

$$|W(\tau) - W(\tau_1)| \leq \varepsilon \left\{ A \ln^2 \delta(\tau) + B \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\ln^2 \delta(\tau')}{\delta(\tau')} d\tau' \right\} \quad (3.9)$$

Auch für den rechten Potentialtopf und für  $H > E_s$  läßt sich die Rechnung genauso mit demselben Ergebnis durchführen, solange das Teilchen nicht den Rand dieser Gebiete, d. h. die Linie  $H = E_s$  berührt.

#### 4. Majorisierung des Wirkungsintegrals

Gleichung (3.9) kann man dazu benutzen, eine Funktion zu konstruieren, die immer größer ist als  $W(\tau)$ . Zu diesem Zweck wird  $\delta(\tau)$  etwas ausführlicher als  $\delta(W, \tau)$  geschrieben und bezeichnet den Abstand der Energie eines Teilchens mit dem Wirkungsintegral  $W$  von der Energieschwelle zur Zeit  $\tau$ . Aus (3.9) folgt damit

$$W(\tau) \leq W_1 + \varepsilon \left\{ A \ln^2 \delta[W(\tau), \tau] + B \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\ln^2 \delta[W(\tau'), \tau']}{\delta[W(\tau'), \tau']} d\tau' \right\}. \quad (4.1)$$

Wenn es eine stetige Funktion  $W^+(\varepsilon, W_1; \tau)$  gibt, die der Gleichung genügt

$$W^+(\tau) = W_1 + \varepsilon \left\{ A \ln^2 \delta[W^+(\tau), \tau] + B \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\ln^2 \delta[W^+(\tau'), \tau']}{\delta[W^+(\tau'), \tau']} d\tau' \right\}, \quad (4.2)$$

dann muß  $W^+(\tau)$  immer größer als  $W(\tau)$  sein. Der Beweis folgt unmittelbar daraus, daß  $|\ln \delta(W, \tau)|$  eine monoton steigende Funktion von  $W$  ist. Es bleibt die Frage, ob und wann diese Majorante  $W^+(\tau)$  tatsächlich existiert. Um dies zu klären, wird (4.2) nach  $\tau$  differenziert, man erhält für  $W^+$  die Differentialgleichung

$$x'(\tau) = \varepsilon \frac{f_\tau + g}{1 - \varepsilon f_x}; \quad f = A \ln^2 \delta(x, \tau), \quad g = B \frac{\ln^2 \delta(x, \tau)}{\delta(x, \tau)}. \quad (4.3)$$

Sie ist eindeutig lösbar in einem Gebiet  $\delta(x, \tau) \geq \bar{\delta} = \varepsilon C_1$  für alle  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  mit einer passenden Konstanten  $C_1$  und hinreichend kleinem  $\varepsilon_0$  (hierdurch wird  $1 - \varepsilon f_x > 0$  garantiert). Damit der Anfangswert  $x(\tau_1)$  so gewählt werden kann, daß man als Lösung

$W^+(\tau)$  erhält, muß man noch

$$\delta(W_1, \tau_1) > C_2 \varepsilon_0 |\ln \varepsilon_0| \quad (4.4)$$

fordern, mit einer passenden Konstanten  $C_2$ . Über die Majorante  $W^+$  kann man also bisher aussagen:



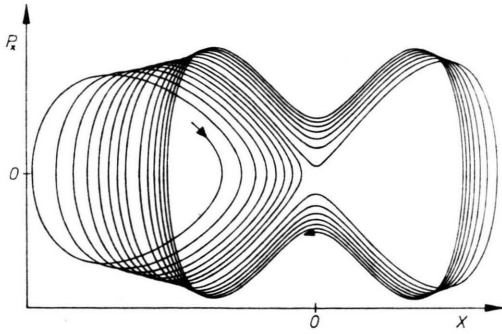


Abb. 3. Bild der in Abb. 1 gezeigten Teilchenbahn in der Phasenebene des eindimensionalen Oszillators.

Wenn (4.4) erfüllt ist, definiert (4.2) eine Funktion  $W^+(\tau)$ , die immer größer ist als  $W(\tau)$  und so lange existiert, wie  $\delta(W^+, \tau) > \bar{\delta} = \varepsilon C_1$  gilt.

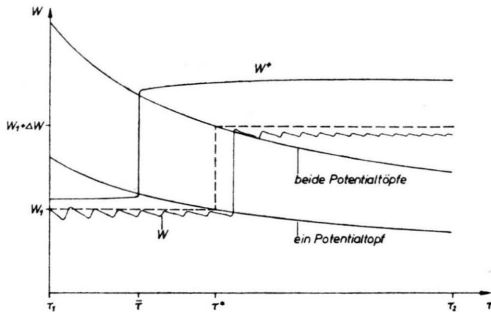


Abb. 4. Zeitliche Änderung des Wirkungsintegrals  $W$ . Im Vergleich dazu der qualitative Verlauf der Majorante  $W^+$  und das Wirkungsintegral für ein streng adiabatisches Teilchen (gestrichelte Linie).

$\bar{\tau}(\varepsilon)$  bezeichne den Zeitpunkt, an dem  $\delta[W^+(\tau), \tau] = \bar{\delta}$  gilt. Damit das betrachtete Teilchen im linken Potentialtopf auch tatsächlich in die Nähe der Energieschwelle gelangt, sei  $F_1(\tau_1) \geq W_1 \geq F_1(\tau_2)$  vorausgesetzt. Bei kleinem  $\varepsilon_0$  ist dies mit der Bedingung (4.4) vereinbar. Dann gibt es einen Zeitpunkt  $\tau^* \in (\tau_1, \tau_2)$  mit  $W_1 = F_1(\tau^*)$  (s. Abbildung 4).

Natürlich ist immer  $\bar{\tau}(\varepsilon) < \tau^*$  und es gilt, wie man sich schnell überzeugen kann,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\tau}(\varepsilon) = \tau^*. \quad (4.5)$$

Wichtig zu wissen ist, wie dieser Grenzwert erreicht wird und wie groß  $W^+(\bar{\tau})$  ist. Zur Klärung der letzten Frage kann man  $W^+(\bar{\tau})$  aus (4.2) abschätzen, indem man  $\delta$  als neue Integrationsvariable einführt. In die Abschätzungen von  $d\delta/d\tau$  geht die strenge Monotonie von  $F_1(\bar{\tau})$  ein und man erhält das Ergebnis

$$W^+(\bar{\tau}) < W_1 + C_3 \varepsilon \ln^4 \varepsilon. \quad (4.6)$$

Die Identität  $\delta\{W^+[\bar{\tau}(\varepsilon)], \bar{\tau}(\varepsilon)\} = \varepsilon C_1$  liefert dann zusammen mit (4.6)

$$\tau^* - \bar{\tau}(\varepsilon) < C_4 \varepsilon \ln^4 \varepsilon. \quad (4.7)$$

Damit hat man das Wirkungsintegral bis zur Zeit  $\bar{\tau}$  majorisiert.

Zu diesem Zeitpunkt befindet sich das Teilchen sicher noch im linken Potentialtopf, setzt man also die Majorisierung sofort im oberen Bereich ( $H > E_s$ ) fort, indem man für  $\tau > \bar{\tau}$  definiert

$$W^+(\tau) = F(E_s + \bar{\delta}, \bar{\tau}) + \varepsilon \left\{ A \ln^2 \delta(W^+, \tau) + B \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \frac{\ln^2 \delta(W^+, \tau')}{\delta(W^+, \tau')} d\tau' \right\}, \quad (4.8)$$

dann gilt auch weiterhin  $W^+(\tau) > W(\tau)$ . Die Abschätzungen verlaufen genauso wie oben angegeben und liefern

$$W^+(\tau_2) < F(E_s + \bar{\delta}, \bar{\tau}) + C_5 \varepsilon \ln^4 \varepsilon. \quad (4.9)$$

Mit

$$F_s(\tau) = F_1(\tau) + F_r(\tau) = \lim_{d \rightarrow 0} F(E_s + d, \tau) \quad (4.10)$$

und der Abschätzung

$$F[E_s(\bar{\tau}) + \bar{\delta}, \bar{\tau}] < F_s(\tau^*) + C_6 \varepsilon \ln^4 \varepsilon \quad (4.11)$$

erhält man damit insgesamt die Aussage:

Sei  $\varepsilon_0$  so klein gewählt, daß

$$\delta(W_1, \tau_1) > C_2 \varepsilon_0 |\ln \varepsilon_0|$$

für ein  $W_1$  mit  $F_1(\tau_1) \geq W_1 \geq F_1(\tau_2)$ . Für ein Teilchen im linken Potentialtopf, das zur Zeit  $\tau_1$  das Wirkungsintegral  $W_1$  besitzt, gilt dann

$$W(\tau_2) \leq W_1 + F_r(\tau^*) + C_7 \varepsilon \ln^4 \varepsilon \text{ für } \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (4.12)$$

wobei  $\tau^*$  durch  $W_1 = F_1(\tau^*)$  gegeben ist.

Dies läßt sich sofort erweitern auf Teilchen, die so dicht unter der Energieschwelle starten, daß für  $\varepsilon = \varepsilon_0$  im Bereich  $W^+ < F_1$  gar keine Majorante existiert. In diesem Fall beginnt man sofort mit der Majorisierung im oberen Bereich und nimmt erst bei hinreichend kleinem  $\varepsilon$  die Majorante im unteren Bereich zu Hilfe. Das Ergebnis ist wieder (4.12), d. h. diese Ungleichung gilt jetzt für alle Teilchen

mit  $F_1(\tau_1) \geq W_1 \geq F_1(\tau_2)$ . Für Teilchen mit  $W_1 > F_s(\tau_1)$  erhält man durch Majorisierung im oberen Bereich

$$W(\tau_2) < W_1 + C_8 \varepsilon \ln^4 \varepsilon \quad \text{für } W_1 > F_s(\tau_1), \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (4.13)$$

Lediglich die Teilchen mit  $W_1 < F_1(\tau_2)$  lassen sich nicht so behandeln, denn obwohl sie in der adiabatischen Grenze  $\varepsilon \rightarrow 0$  nicht die Energieschwelle erreichen, gibt es bei endlichem  $\varepsilon$  immer Teilchen, deren Wirkungsintegral sich unstetig ändert, eine Ungleichung der Form (4.13) ist also nicht gleichmäßig für alle Teilchen mit  $W_1 < F_1(\tau_2)$  möglich. Diese Schwierigkeit läßt sich nur beheben, wenn man den Begriff des Wirkungsintegrals so modifiziert, daß es wieder eine stetige Funktion der Energie wird. Dazu dienen die folgenden Überlegungen, bei denen eine Zuordnung zwischen den Niveaus im linken und im rechten Potentialtopf getroffen werden soll.

Für jedes  $J$  mit  $F_1(\tau_2) \leq J \leq F_1(\tau_1)$  gibt es genau ein  $\tau^*(J)$ ,  $\tau_1 \leq \tau^* \leq \tau_2$ , so daß  $F_1(\tau^*) = J$ . Die Funktion  $J_r(J)$  sei definiert durch

$$J_r(J) = F_r[\tau^*(J)]. \quad (4.14)$$

$J_r(J)$  ist dann der Sprung, den das Wirkungsintegral eines streng adiabatischen Teilchens erleidet, das mit  $W(\tau_1) = J$  im linken Topf startet. Entsprechend wird für Werte  $F_r(\tau_2) \leq J \leq F_r(\tau_1)$  die Funktion  $J_l(J)$  definiert, welche die Umkehrfunktion zu  $J_r(J)$  bildet. Nun wird für Teilchen aus dem linken Topf eine Größe  $K$  definiert

$$K^{(1)}(J, \tau) = \begin{cases} J & \text{für } J \geq F_s(\tau), \\ J + J_r(J) & \text{für } F_1(\tau_2) \leq J < F_1(\tau), \\ J + F_r(\tau_2) & \text{für } J < F_1(\tau_2). \end{cases} \quad (4.15)$$

Entsprechend lautet die Definition für den rechten Topf.  $K[F(H, \tau), \tau]$  ist zu jedem Zeitpunkt  $\tau$  eine monotone, stetige Funktion von  $H$ . Für streng adiabatische Teilchen ist  $K(\tau) = K[W(\tau), \tau]$  eine Bewegungskonstante:  $K(\tau_2) = K(\tau_1)$ . Man kann jetzt (4.12) und (4.13) zusammenfassen zu

$$K(\tau_2) < K(\tau_1) + C_9 \varepsilon \ln^4 \varepsilon \quad \text{für } \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad K(\tau_1) \geq F_s(\tau_2). \quad (4.16)$$

Diese Gleichung gilt auch für Teilchen aus dem rechten Topf, denn da kein Topf vor dem anderen in seinen Eigenschaften ausgezeichnet ist, gelten alle vorher abgeleiteten Beziehungen in entsprechender Weise auch für den rechten Topf, und man kann die

Bezeichnung „l“ oder „r“ fortlassen. Man darf nicht erwarten, daß (4.16) gleichmäßig für alle Teilchen gilt, wenn man Teilchen mit beliebig hohen Anfangsenergien zuläßt; es sei daher im folgenden für alle Teilchen  $H(\tau_1) \leq H_0$ , wobei  $H_0$  eine willkürliche, aber fest gewählte obere Energiegrenze ist.

Für die stetige Größe  $K$  läßt sich (4.16) mit demselben Argument wie früher auch auf den noch ausgeklammerten Bereich  $K(\tau_1) < F_s(\tau_2)$  erweitern und man erhält mit  $\lambda = \varepsilon \ln^4 \varepsilon$  als Ergebnis der Majorisierung: Für alle Teilchen mit  $H(\tau_1) \leq H_0$  gilt mit denselben Konstanten  $C$  und  $\lambda_0$

$$K(\tau_2) < K(\tau_1) + C\lambda, \quad \lambda \leq \lambda_0. \quad (4.17)$$

## 5. Invarianz im Mittel

Die Aussage, die man bei der Betrachtung einer Teilchengruppe gegenüber dem einzelnen Teilchen zusätzlich in der Hand hat, ist die Flächenerhaltung in der Phasenebene, sofern man nicht den Einfluß der Anfangsbedingungen auf das singuläre Verhalten eines Teilchens explizit untersuchen will, und allein mit diesem Argument der Flächenerhaltung soll im folgenden die Umkehrung von (4.17) für den Mittelwert von  $K$ , damit also die adiabatische Invarianz im Mittel gezeigt werden.

Es sei eine beliebige Teilchengruppe gegeben, die durch eine Verteilungsfunktion  $f(p, q, \tau)$  beschrieben werde.  $f$  genüge den Bedingungen

$$\begin{aligned} f(p, q, \tau_1) &\leq A \quad \text{für alle } p, q; \\ f(p, q, \tau_1) &= 0 \quad \text{für } H(p, q, \tau) > H_0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Sei  $H_0$  so groß gewählt, daß  $K_0 = F(H_0, \tau_1) > F_s(\tau_1)$ . Für den Mittelwert von  $K$  bez. dieser Teilchengruppe gilt entsprechend (4.17)

$$\begin{aligned} \langle K(\tau_2) \rangle_f &\leq \langle K(\tau_1) \rangle_f + C\lambda, \\ \langle K(\tau) \rangle_f &= \frac{\int K(p, q, \tau) f(p, q, \tau) dF}{\int f(p, q, \tau) dF}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Für eine Verteilungsfunktion  $\sigma$ , die durch die Anfangswerte

$$\sigma(p, q, \tau_1) = \begin{cases} 1 & \text{für } K(p, q, \tau_1) \leq K_0, \\ 0 & \text{für } K(p, q, \tau_1) > K_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

gegeben ist, läßt sich leicht zeigen, daß der Mittelwert von  $K$  immer zunehmen muß:

Die Fläche  $G_1$ , welche diese Teilchengruppe zur Zeit  $\tau_1$  einnimmt, verformt sich mit der Zeit in eine Fläche  $G_2$ , die zwar i. a. eine andere Form, aber

denselben Flächeninhalt  $K_0$  besitzt (Abbildung 5). Die Fläche, die von der Linie  $K(p, q, \tau_2) = K_0$  umrandet wird, sei  $G_0$ , und zwar ist das die Fläche, welche die Teilchengruppe zur Zeit  $\tau_2$  einnehmen würde, wenn sich alle Teilchen streng adiabatisch verhielten. Der Flächenteil von  $G_2$ , der über  $G_0$  hinausragt, sei  $g^+$ , dafür ragt der gleich große Teil  $g^-$  von  $G_0$  über  $G_2$  hinaus.

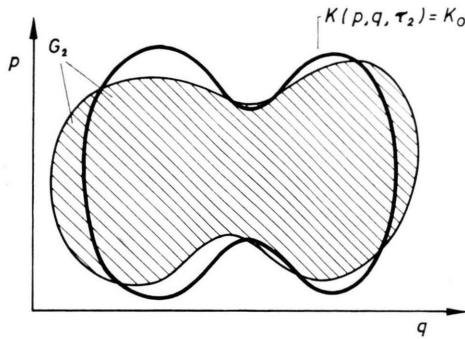


Abb. 5. Die Fläche  $G_1$ , die zur Zeit  $\tau_1$  von der Linie  $K(p, q, \tau_1) = K_0$  umrandet wurde, hat sich zur Zeit  $\tau_2$  in eine Fläche  $G_2$  verwandelt, die zwar den gleichen Flächeninhalt  $K_0$  besitzt, aber nicht mehr von der Linie  $K(p, q, \tau_2) = K_0$  umrandet wird.

Der Mittelwert von  $K$  zur Zeit  $\tau_1$  ist

$$\langle K(\tau_1) \rangle_\sigma = \frac{1}{K_0} \int_{G_1} K dF. \quad (5.4)$$

Zur Zeit  $\tau_2$  ist der Mittelwert

$$\begin{aligned} \langle K(\tau_2) \rangle_\sigma &= \frac{1}{K_0} \int_{G_2} K dF \\ &= \frac{1}{K_0} \left\{ \int_{G_0} K dF + \int_{g^+} K dF - \int_{g^-} K dF \right\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Da in jedem Punkte von  $g^+$  der Wert von  $K$  größer oder gleich dem Maximalwert von  $K$  in  $g^-$  ist, gilt

$$\langle K(\tau_2) \rangle_\sigma \geq \frac{1}{K_0} \int_{G_0} K dF. \quad (5.6)$$

Das rechte Integral ist gerade gleich dem Mittelwert von  $K$  zur Zeit  $\tau_2$ , wenn sich alle Teilchen streng adiabatisch verhalten, also  $K$  und damit auch  $\langle K \rangle$  konstant bleibt, und daher gleich dem Mittelwert von  $K$  zur Zeit  $\tau_1$ . Man erhält

$$\langle K(\tau_2) \rangle_\sigma \geq \langle K(\tau_1) \rangle_\sigma. \quad (5.7)$$

Wendet man (5.2) auf die Verteilungsfunktion

$$g(p, q, \tau) = A \sigma(p, q, \tau) - f(p, q, \tau) \quad (5.8)$$

an – um  $g$  bilden zu können, ist es notwendig, daß  $f$  beiden Bedingungen (5.1) genügt –, dann erhält man

$$\begin{aligned} \int K(\tau_2) g dF &= A \int K(\tau_2) \sigma dF - \int K(\tau_2) f dF \\ &\leq \int K(\tau_1) g dF + C \lambda \int g dF \\ &\leq A \int K(\tau_2) \sigma dF - \int K(\tau_1) f dF \\ &\quad + C \lambda (A K_0 - \int f dF) \end{aligned} \quad (5.9)$$

und die Umkehrung des Vorzeichens liefert die Ungleichung

$$\langle K(\tau_2) \rangle_f \geq \langle K(\tau_1) \rangle_f - \lambda C (A K_0 - \int f dF) / \int f dF. \quad (5.10)$$

Zusammen mit (5.2) folgt die adiabatische Invarianz von  $K$  im Mittel

$$|\langle K(\tau_2) \rangle_f - \langle K(\tau_1) \rangle_f| = 0(\varepsilon \ln^4 \varepsilon). \quad (5.11)$$

Damit ist auch bei einem Potential mit zwei Minima eine Größe  $K$  gefunden worden, die zwar nicht mikroskopisch (bei der Betrachtung eines Teilchens), wohl aber noch makroskopisch (bei der Mittelung über eine Teilchengruppe) adiabatisch invariant ist.  $K$  kann bei der Kenntnis des zeitlichen Verlaufs von für das Potential charakteristischen Größen, den Flächen der beiden Potentialtöpfe, genauso berechnet werden wie das Wirkungsintegral  $J$ .

Die Gln. (5.2) und (5.7) gelten auch für jede monoton steigende Funktion von  $K, G(K)$ , die gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung genügt, und aus (5.11) wird dann

$$|\langle G[K(\tau_2)] \rangle_f - \langle G[K(\tau_1)] \rangle_f| = 0(\varepsilon \ln^4 \varepsilon). \quad (5.12)$$

Betrachtet man z. B. die Teilchenenergie  $H$  als Funktion von  $K$  und setzt  $G(K) = H(K, \tau_2)$ , dann liefert (5.12) eine Abschätzung für die mittlere Teilchenenergie der Gruppe zur Zeit  $\tau_2$ .

## 6. Aufspaltung einer Teilchengruppe

Für das Potential war vorausgesetzt worden, daß die Fläche der beiden Potentialtöpfe streng monoton abnimmt; auch bei streng monotoner Zunahme gilt die adiabatische Invarianz von  $K$  im Mittel, denn durch Zeitumkehr, die im Bilde des eindimensionalen Oszillators möglich ist, wird daraus wieder das vorher betrachtete Problem. Es tritt jedoch das neue Phänomen auf, daß eine Teilchengruppe aufgespalten und auf die beiden Töpfe aufgeteilt wird, und da  $H(K, \tau_2)$  in beiden Töpfen eine verschiedene Funktion ist, muß man z. B. bei der Anwendung

von (5.12) für eine Energieabschätzung erst wissen, wie sich die Teilchen auf beide Töpfe verteilen. Bei hinreichend glatter Verteilungsfunktion wird dies genau entsprechend der Flächenzunahme der einzelnen Potentialtöpfe geschehen. Zum Beweis dieser Vermutung sind jedoch noch einige weitere Überlegungen erforderlich, wobei als Beispiel das Problem der Energieabschätzung betrachtet wird.

In dem Fall, daß die Fläche der beiden Potentialtöpfe im Zeitintervall  $(\tau_1, \tau_2)$  streng monoton zunimmt, wird  $K(J, \tau)$  analog zu (4.15) definiert

$$K^{(l)}(J, \tau) = \begin{cases} J & \text{für } J \geq F_s(\tau), \\ J + J_r(J) & \text{für } F_1(\tau_1) \leq J < F_1(\tau), \\ J + F_r(\tau_1) & \text{für } J < F_1(\tau_1) \end{cases} \quad (6.1)$$

und entsprechend  $K^{(r)}(J, \tau)$  für den rechten Potentialtopf. Die Aussage (4.17) lautet jetzt für den umgekehrten Zeitablauf

$$K(\tau_2) > K(\tau_1) - C\lambda \quad \text{für } \lambda \leq \lambda_0. \quad (6.2)$$

Da bei einer Teilchengruppe nur der Teil interessiert, der im adiabatischen Grenzfall tatsächlich eine Aufspaltung erfährt, also der Bereich  $F_s(\tau_1) \leq K \leq F_s(\tau_2)$  (die anderen Teile können bis auf Randzonen von der Ordnung  $\lambda$  ganz normal behandelt werden), sei die folgende Rechnung auf diesen Bereich beschränkt. Zunächst wird dabei wieder das Verhalten von Mittelwerten über bestimmte Flächen interessieren.

Die Fläche  $G_1$  sei zur Zeit  $\tau_1$  gegeben durch

$$G_1 = \{(p, q) | F_s(\tau_1) \leq K(p, q, \tau_1) \leq F_1\} \quad (6.3)$$

mit einer festen Zahl  $F_1, F_s(\tau_1) \leq F_1 \leq F_s(\tau_2)$ . Die Endpunkte der Teilcentrajektorien, die zur Zeit  $\tau_1$  in  $G_1$  beginnen, bilden zur Zeit  $\tau_2$  die Fläche  $G_2$  (vgl. Kap. 5). Man kann sich schnell davon überzeugen, daß  $G_2$  bis auf Flächenstücke, die zusammen kleiner als  $4C\lambda$  sind, mit  $G_1'$ , dem „adiabatischen Bild“ von  $G_1$ , identisch ist:

$$G_1' = \{(p, q) | F_s(\tau_1) \leq K(p, q, \tau_2) \leq F_1\}. \quad (6.4)$$

Dann ergibt sich unmittelbar die Abschätzung

$$\left| \int_{G_2} H(p, q, \tau_2) dF - \int_{G_1'} H(p, q, \tau_2) dF \right| \leq 4C\lambda H_0 \quad (6.5)$$

mit einer passenden oberen Schranke  $H_0$  für die Teilchenenergie. Man kann den Integralen eine etwas andere Form geben, wenn man die normierte Umlaufzeit  $\eta$  einführt

$$d\eta = \frac{ds}{|\nabla H|} \left( \oint \frac{ds}{|\nabla H|} \right)^{-1} \quad (6.6)$$

und mit  $H_2(J, s)$  die Energie bezeichnet, die ein Teilchen, das zur Zeit  $\tau_1$  vom Punkte  $(J, s) [J > F_s(\tau_1)]$  aus gestartet ist, zur Zeit  $\tau_2$  besitzt.  $H_2(J, s)$  ist natürlich noch eine Funktion von  $\lambda$  und besitzt mit kleiner werdendem  $\lambda$  i. allg. beliebig feine Oszillationen endlicher Amplitude in Abhängigkeit von  $J$  und  $s$ .

$$\begin{aligned} \int_{G_2} H(p, q, \tau_2) dF &= \int_{G_1} H_2[J, s(\eta)] d\eta dJ \\ &= \int_{F_s(\tau_1)}^{F_1} dJ \int_0^1 d\eta H_2(J, s). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Beim zweiten Integral in (6.5) muß man berücksichtigen, daß  $H$  zwar nur eine Funktion von  $J$  ist, aber in den beiden Potentialtöpfen eine verschiedene.

$$\begin{aligned} \int_{G_1'} H(p, q, \tau_2) dF &= \int_{F_1(\tau_1)}^{J_1^{(l)}} H_1(J, \tau_2) dJ \\ &+ \int_{F_r(\tau_1)}^{J_1^{(r)}} H_r(J, \tau_2) dJ. \end{aligned} \quad (6.8)$$

$J_1^{(l, r)}$  ist gegeben durch

$$K^{(l, r)}(J_1^{(l, r)}, \tau_2) = F_1. \quad (6.9)$$

Führt man gemäß (6.1) in (6.8)  $K$  als neue Integrationsvariable ein, dann ist

$$\int_{G_1'} H(p, q, \tau_2) dF = \int_{F_s(\tau_1)}^{F_1} \left( \frac{H_1}{1 + J_r'} + \frac{H_r}{1 + J_l'} \right) dK. \quad (6.10)$$

Hierbei sind  $H_1, H_r, J_1, J_r$  Funktionen von  $J(K)$ . (6.5) kann man also in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \int_{F_s(\tau_1)}^{F_1} dJ \int_0^1 d\eta H_2(J, s) &= \\ &= \int_{F_s(\tau_1)}^{F_1} \left( \frac{H_1}{1 + J_r'} + \frac{H_r}{1 + J_l'} \right) dK + 0(\lambda), \end{aligned} \quad (6.11)$$

wobei „ $0(\lambda)$ “ unabhängig von  $F_1$  ist.

Wenn man nach diesen Vorbereitungen das Verhalten einer allgemeinen Teilchengruppe betrachtet, wird man, wie schon oben erwähnt, gewisse Glattheitsforderungen an die Verteilungsfunktion stellen müssen, um die Teilchengruppen auszuschließen, die sich bei einem bestimmten, beliebig kleinen  $\lambda$ -Wert zur Zeit  $\tau_2$  ganz in einem Potentialtopf ansammeln. Hier sei die sehr einschränkende Voraussetzung gemacht, daß die Verteilungsfunktion zur Zeit  $\tau_1$  nur eine Funktion von  $J$  ist:

$$f(p, q, \tau_1) = g(J), \quad (6.12)$$



wobei  $g(J)$  für  $F_s(\tau_1) \leq J \leq F_s(\tau_2)$  stetig differenzierbar sei und außerhalb dieses Bereiches verschwinde. Die zu berechnende Energie  $E$  der Teilchengruppe zur Zeit  $\tau_2$  ist

$$E = \int_{F_s(\tau_1)}^{F_s(\tau_2)} dJ g(J) \int_0^1 d\eta H_2(J, s). \quad (6.13)$$

Partielle Integration und Anwendung von (6.11) liefert

$$\begin{aligned} E &= g[F_s(\tau_2)] \int_{F_s(\tau_1)}^{F_s(\tau_2)} dJ \int_0^1 d\eta H_2(J, s) \\ &- \int_{F_s(\tau_1)}^{F_s(\tau_2)} dF_1 g'(F_1) \int_{F_s(\tau_1)}^{F_1} dJ \int_0^1 d\eta H_2(J, s) \\ &= \int_{F_s(\tau_1)}^{F_s(\tau_2)} g(K) \left( \frac{H_1}{1+J_r'} + \frac{H_r}{1+J_l'} \right) dK + O(\lambda). \end{aligned} \quad (6.14)$$

In „0( $\lambda$ )“ geht die Beschränktheit von  $g$  und  $g'$  ein. Dies Ergebnis läßt nun folgende Interpretation zu: Die Anzahl der Teilchen, die sich zur Zeit  $\tau_1$  in der Umgebung der Linie  $J(p, q, \tau_1) = K$  befinden, ist  $g(K)dK$ . Sie erreichen bei streng adiabatischem Verhalten zu einem Zeitpunkt  $\tilde{\tau}$  die Energieschwelle, an dem  $F_s(\tilde{\tau}) = K$  gilt.  $(1+J_r')^{-1}$  hat dann für den betrachteten Wert von  $K$  den Wert

$$\frac{1}{1+J_r'[F_s(\tilde{\tau})]} = \frac{F_1'(\tilde{\tau})}{F_s'(\tilde{\tau})}, \quad (6.15)$$

entsprechendes gilt für  $(1+J_l')^{-1}$ . Das bedeutet, daß der Teil der Teilchengruppe, der bei streng adiabatischem Verhalten zur Zeit  $\tilde{\tau}$  die Energieschwelle erreicht, in einem Verhältnis aufspaltet, das durch die relative Flächenzunahme der beiden Potentialtöpfe in diesem Augenblick gegeben ist, genau wie es anschaulich zu erwarten war.

Damit ist gezeigt, daß auch das Phänomen der Gruppenaufspaltung mit dem Konzept der adiabatischen Invarianz quantitativ innerhalb der durch den Parameter  $\lambda = \varepsilon \ln^4 \varepsilon$  gegebenen Genauigkeitsgrenzen beschreibbar ist. Sehr wahrscheinlich ist die Voraussetzung, daß  $f$  zur Zeit  $\tau$  nur eine Funktion von  $J$  ist, für eine Aussage der Art (6.14) nicht notwendig [ $g(K)$  würde dann für den Mittelwert von  $f$  über eine Linie  $J(p, q, \tau_1) = K$  zur Zeit  $\tau_1$  zu stehen haben].

## 7. Diskussion

Es wurde die Bewegung geladener Teilchen in 1-dim., zeitlich schwach veränderlichen Magnetfeldern betrachtet. Sie wird durch eine Hamilton-Funktion beschrieben, die einem 1-dim. Oszillator mit

schwach zeitabhängigem Potential entspricht. Die adiabatische Invarianz des Wirkungsintegrals ist nur für solche Teilchen gesichert, die sich in Gebieten der Phasenebene bewegen, in denen  $|\nabla H|$  nicht beliebig klein wird.

Teilchen, die sich lange Zeit in der Umgebung eines Sattelpunktes aufhalten (vom Magnetfeld her gesehen sind es diejenigen, die lange Zeit ohne Gyrationbewegung frei in einer Neutralen Schicht fliegen), verhalten sich offensichtlich nicht-adiabatisch, denn der Wert ihres Wirkungsintegrals ändert sich entsprechend der Fläche unter der Linie  $H = \text{const}$ , die durch den Sattelpunkt geht. Für den Fall, daß die Flächen der beiden Potentialtöpfe mit der Zeit abnehmen, wurde gezeigt, daß bei Betrachtung einer Teilchengruppe die nicht-adiabatischen Teilchen auf den Mittelwert des Wirkungsintegrals keinen Einfluß haben, wenn man dieses entsprechend der veränderten Topologie der Phasenebene neu definiert.

Das Problem der Neudefinierung kann umgangen werden, indem man den Begriff „adiabatisch“ folgendermaßen erweitert:

- Adiabatische Teilchen haben in der Grenze  $\varepsilon \rightarrow 0$  zur Zeit  $\tau_2$  eine Energie, die unabhängig von ihrer Anfangsphase ist, d. h. unabhängig davon, an welcher Stelle auf der betr. Linie  $H = \text{const}$  sie sich zur Zeit  $\tau_1$  befanden (hieraus folgt wegen der Flächenerhaltung in der Phasenebene unmittelbar die adiabatische Invarianz des modifizierten Wirkungsintegrals).
- Nicht-adiabatische Teilchen sind durch ihre Anfangsphase ausgezeichnet.

Die obige Aussage lautet jetzt, daß bei der Betrachtung einer Teilchengruppe der Mittelwert einer Größe, die nur eine Funktion der Energie ist, so berechnet werden kann, als verhielten sich alle Teilchen adiabatisch.

In dem Fall, daß die Flächen der beiden Potentialtöpfe mit der Zeit zunehmen (z. B. wenn der Feldgradient in der Neutralschicht abnimmt), kann es passieren, daß eine zusammenhängende Teilchengruppe sich auf die beiden Potentialtöpfe aufteilt und so mit der Zeit in zwei separate Gruppen zerfällt. Da physikalische Größen für beide Teilgruppen verschiedene Funktionen des modifizierten Wirkungsintegrals sein können, reicht die Adiabatische Invarianz im Mittel alleine nicht aus, um Mittelwerte dieser Größen zu berechnen.

Als Beispiel wurde der Mittelwert der Energie untersucht. Das Ergebnis ist so zu interpretieren, daß für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Wahrscheinlichkeit, welcher der beiden sich bildenden Teilgruppen sich ein Teilchen beim Unterschreiten der Schwellenenergie anschließt, der Zunahme des betreffenden Phasenvolumens proportional ist. Das läßt sich auch wieder so verstehen, daß die Teilchen im Mittel ihre Anfangsphase vergessen und die eigentliche Aufspaltung ein statistischer Prozeß ist, gewichtet gemäß dem zur Verfügung gestellten Phasenvolumen. Damit ist also auch die betrachtete Aufspaltung einer Teilchengruppe ein im Mittel adiabatischer Vorgang.

Ein Teil dieser Arbeit entstand, während der Verfasser Mitarbeiter am Institut für Plasmaphysik der Kernforschungsanlage Jülich war und ist dort im Report JÜL-384-PP (1966) beschrieben.

Herrn Prof. K. Schindler danke ich sehr für viele wertvolle Ratschläge und Diskussionen und sein stetes Interesse am Fortgang und der Veröffentlichung dieser Arbeit.

Diese Arbeit wurde z. T. durch den Sonderforschungsbereich Nr. 162 Bochum/Jülich gefördert.

- <sup>1</sup> T. Northrop, *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Interscience Publishers, New York 1963.
- <sup>2</sup> B. Lehnert, *Dynamics of Charged Particles*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1964.
- <sup>3</sup> H. Alfvén, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford Univ. Press, 1950.
- <sup>4</sup> M. Kruskal, *Proc. 3rd. Intern. Conf. on Phenomena in Ion. Gases*, Venice 1957, S. 562.

- <sup>5</sup> C. S. Gardner, *Phys. Rev.* **115**, 791 [1959].
- <sup>6</sup> S. Tamor, *J. Nucl. Energy, Pt. C*, **1**, 199 [1960].
- <sup>7</sup> A. Cavalière, B. Crosignani, and F. Gratton, *Nuovo Cim.* **33**, 1338 [1964].
- <sup>8</sup> A. Lenard, *Ann. Physics* **6**, 261 [1959].
- <sup>9</sup> K. Schindler, *J. Math. Phys.* **6**, 313 [1965].
- <sup>10</sup> K. Schindler, *Z. Physik* **183**, 100 [1965].